

EGZAMIN Z MATEMATYKI, wersja III-A

Uwaga. Nie wolno używać kalkulatora.

Proszę nie używać korektora. Błędne obliczenia lub sformułowania wystarczy wyraźnie skreślić.

1. Obliczyć w , jeśli:

a) $w = \left(\sqrt[3]{16} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{18} \right)^3,$

b) $w = x + y \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}},$ gdzie $x = 3, y = -4.$

2. Rozwiązać nierówność $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) > -2.$

3. Pochodna funkcji f , określonej w całym zbiorze liczb rzeczywistych, jest równa $f'(x) = x^2(x^2 - 1)$. W jakich przedziałach funkcja f jest rosnąca?

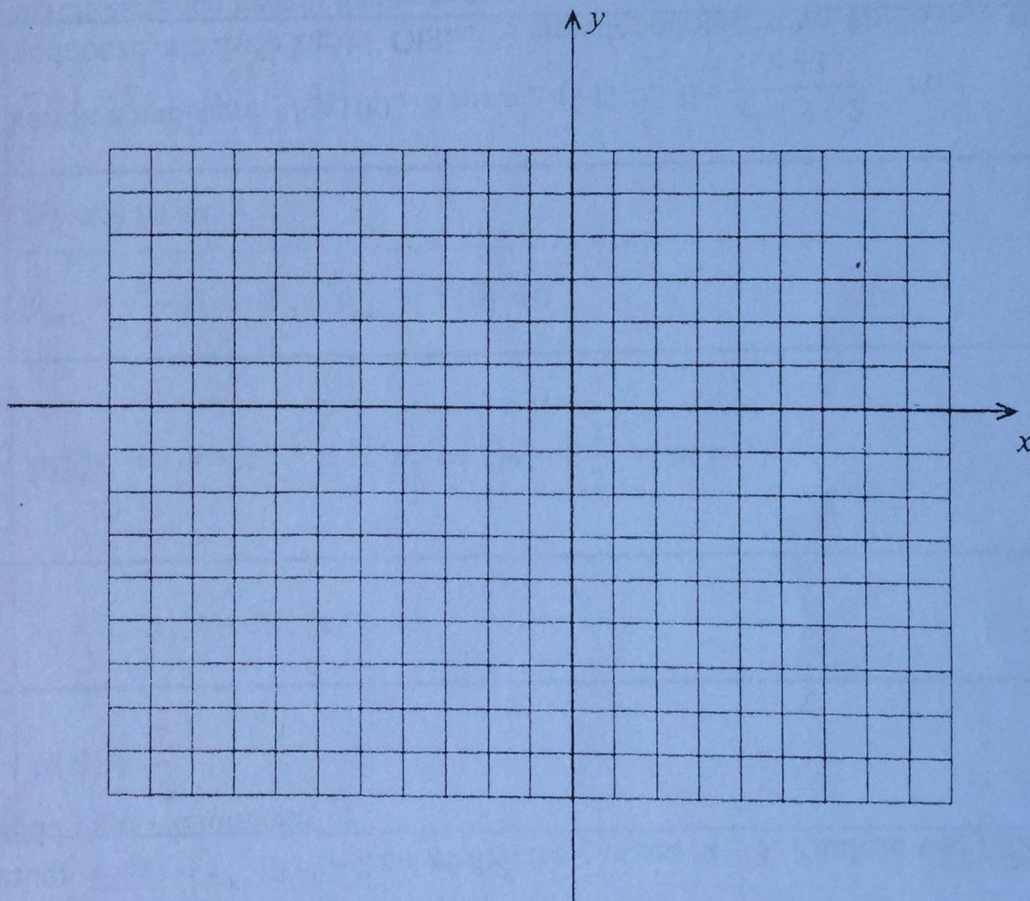
4. Niech $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin x \geq \frac{1}{2} \right\}$, $B = \{ x \in \mathbb{R} : \log_3 x < 0 \}$. Wyznaczyć zbiór $A \cap B$.

5. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{2n^2 - 1}$.

6. Rozwiązać układ nierówności
$$\begin{cases} 9x^2 - 6x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 8 < 0 \end{cases}$$

7. Narysować wykres funkcji
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \leq -1 \\ -x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

i wyznaczyć jej ekstrema lokalne.



8. Dla jakich wartości parametru m proste
 $p_1 : (2m-1)x + y - m = 0$ i $p_2 : (m+1)x + y + 5 = 0$
są: a) równoległe,
b) prostopadłe?

9. Wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + m$ dzieli się przez $x - 3$. Znaleźć wszystkie pierwiastki tego wielomianu.

10. Spośród kartek z napisami: $\log 100$, $5 \cos \pi$, $(-1)^{-2}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, $16^{\frac{1}{2}}$
losujemy jednocześnie dwie kartki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb na
wylosowanych kartkach będzie liczbą parzystą.

Nr zadania	Odpowiedź	Maks. punktów	Punkcja
1.	a) 108	5	
	b) $\frac{4}{3}$	5	
2.	$x \in (-3, 1)$	10	
3.	Funkcja jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$.	10	
4.	$A \cap B = \left[\frac{\pi}{6}, 1 \right)$	10	
5.	$\frac{1}{2}$	10	
6.	$x \in \left(-2, \frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{3}, 4 \right)$	10	
7.	Wykres na str. 3.	6	
	$y_{\min} = f(-1) = -1$, $y_{\max} = f(0) = 0$	4	
8.	$p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow m = 2$; $p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow (m = -\frac{1}{2} \vee m = 0)$	10	
9.	$x_1 = 3$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$	10	
10.	$P(B) = \frac{7}{10}$	10	
Razem		100	